でっかい数を作る

鵺 @nue_of_k

問題

1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0 の 10 個と $+$, $-$, $\times$, $\div$, ( ) を使って大きい数を作れ。

出典: https://twitter.com/s01/status/21375206236

定義

本解答で用いる用語・記号の定義は以下の通りとする。

リテラル	定数 $1.1, \ldots, 2.0$ のこと。リテラル全体の集合を $\Lambda := \{1.1, \ldots, 2.0\}$ と書く。
式	1 つ以上のリテラルと四則演算のみにより構成される数式であって、同じリテラルが複数回出現しないもの。式とその値（有理数値）とは適宜同一視する。
正規な式	全ての部分式の値が正である式。
最外演算	2 つ以上のリテラルを含む式において、最も外側の演算。
$\mathrm{Lit}(e)$	式 e に含まれる全てのリテラルからなる集合。
$\mathrm{Max}(A)$	$\mathrm{Lit}(e) = A \subseteq \Lambda$ なる正規な式 e のうち値が最大であるもの（のうちの 1 つ）。
$\mathrm{Min}(A)$	$\mathrm{Lit}(e) = A \subseteq \Lambda$ なる正規な式 e のうち値が最小であるもの（のうちの 1 つ）。
$e_1 \equiv e_2$	式 e_1 と式 e_2 が（交換律・結合律等による違いは無視して）構文的に等しい。
$e_1 = e_2$	式 e_1 の値と式 e_2 の値が等しい。 （不等号 $\leq, \geq, <, >$ も同様に値の比較により定義する）
$A \sqcup B$	集合 A と集合 B の非交和（$U = A \sqcup B$ は $U = A \cup B$ かつ $A \cap B = \emptyset$ を意味する）。

解答

補題 1 値が 0 でない任意の式 e に対し、次の条件を満たす正規な式 $\bar{e}$ が構成できる。

- $\mathrm{Lit}(\bar{e}) \subseteq \mathrm{Lit}(e)$, 特に e の或る部分式の値が 0 であるならば $\mathrm{Lit}(\bar{e}) \subsetneq \mathrm{Lit}(e)$
- 式 $\bar{e}$ の値は式 e の値の絶対値に等しい。

証明 式 e の構成に関する帰納法で示す。

- e がリテラルの場合: $\bar{e} :\equiv e$ とすればよい。
- $e \equiv e_1 \pm z$ または $e \equiv z \pm e_1$（但し $z = 0$）の場合: $\bar{e} :\equiv \bar{e}_1$ とすればよい。
- $e \equiv e_1 \pm e_2$（但し $e_1 \neq 0$ かつ $e_2 \neq 0$）の場合: e_1, $\pm e_2$ の値が同符号であれば $\bar{e} :\equiv \bar{e}_1 + \bar{e}_2$、異符号であれば $\bar{e} :\equiv \bar{e}_1 - \bar{e}_2$ または $\bar{e} :\equiv \bar{e}_2 - \bar{e}_1$（一方の値が正であるから、正である方）とすればよい。
- $e \equiv e_1 \times e_2$ の場合: $\bar{e} :\equiv \bar{e}_1 \times \bar{e}_2$ とすればよい。
- $e \equiv e_1 \div e_2$ の場合: $\bar{e} :\equiv \bar{e}_1 \div \bar{e}_2$ とすればよい。 □

補題 2 任意の非空な $A \subseteq \Lambda$ について、$\mathrm{Lit}(e) = A$ なる式 e のうち値が最大であるものを M とすると、$M = \mathrm{Max}(A)$ が成り立つ。

証明 補題 1 より $\mathrm{Lit}(\bar{M}) \subseteq A$ である。そこで $\Delta := A \setminus \mathrm{Lit}(\bar{M})$ とおく。もし $\Delta \neq \emptyset$ だとすると以下が成り立つ（但し $\sum \Delta$ は Δ の全ての元を加算 $+$ で繋げて得られる式を表す)。

$$\mathrm{Lit}\bigl(\bar{M} + \sum \Delta\bigr) = A \quad \text{かつ} \quad M = \bar{M} < \bar{M} + \sum \Delta$$

これは式 M の値の最大性に反する。よって $\Delta = \emptyset$ すなわち $\mathrm{Lit}(\bar{M}) = A$ が必要。式 $\bar{M}$ は正規であり、かつ $\mathrm{Lit}(e) = A$ なる式 e のうち値が最大なものであるから、すなわち $M = \bar{M} = \mathrm{Max}(A)$ である。 □

補題 3 a, b, c, d は相異なるリテラルとする。

1. $A = \{a, b\} \subseteq \Lambda$ に対し、$\mathrm{Max}(A) = a + b > a \times b$ である。
2. $A = \{a, b, c\} \subseteq \Lambda$ に対し、$\mathrm{Max}(A) > a + b + c$ である。
3. $A = \{a, b, c, d\} \subseteq \Lambda$ に対し、$\mathrm{Max}(A) > (a + b) \times (c + d)$ である。

証明 注意深く場合分けをすればわかる。 □

補題 4 $|A| \geq 3$ なる $A \subseteq \Lambda$ に対し、$\mathrm{Max}(A)$ の最外演算は乗算 $\times$ または除算 $\div$ である。すなわち $\mathrm{Max}(A)$ は $\mathrm{Max}(B) \times \mathrm{Max}(C)$ または $\mathrm{Max}(B) \div \mathrm{Min}(C)$ の形（但し $A = B \sqcup C$）に分解できる。

証明 正規な式 e_1, e_2 に対し $e_1 - e_2 < e_1 + e_2$, $e_2 - e_1 < e_1 + e_2$ であるから $\mathrm{Max}(A)$ の最外演算は減算 $-$ ではない。以降、$\mathrm{Max}(A)$ の最外演算が加算 $+$ である、すなわち次式の形で書けると仮定して矛盾を導く。

$$\mathrm{Max}(A) \equiv \mathrm{Max}(B) + \mathrm{Max}(C) \qquad \text{（但し } A = B \sqcup C,\ |B| \geq |C| \geq 1\text{）}$$

以下、$|A|$ に関する累積帰納法で示す。

- $|B| = 2$, $|C| = 1$ の場合: $B = \{a, b\}$, $C = \{c\}$ と書ける。補題 3 の 1. と 2. より次式の通り矛盾。

$$\mathrm{Max}(A) \equiv \mathrm{Max}(B) + \mathrm{Max}(C) \equiv (a + b) + c < \mathrm{Max}(A)$$

- $|B| = |C| = 2$ の場合: $B = \{a, b\}$, $C = \{c, d\}$ と書ける。補題 3 の 1. と 2. より次式の通り矛盾。

$$\mathrm{Max}(A) \equiv \mathrm{Max}(B) + \mathrm{Max}(C) \equiv (a + b) + (c + d) \equiv (a + b + c) + d < \mathrm{Max}(\{a, b, c\}) + d$$

- $\underline{|B| \geq 3\ の場合}$: $|B| < |A|$ であるから、帰納法の仮定より $\mathrm{Max}(B)$ は $\mathrm{Max}(D) \times \mathrm{Max}(E)$ または $\mathrm{Max}(D) \div \mathrm{Min}(E)$ の形（但し $B = D \sqcup E$）に分解できる。
  - $\underline{\mathrm{Max}(B) \equiv \mathrm{Max}(D) \times \mathrm{Max}(E)\ の場合}$: $\mathrm{Max}(E) > 1$ であるから、次式の通り矛盾。

$$\mathrm{Max}(A) \equiv \mathrm{Max}(D) \times \mathrm{Max}(E) + \mathrm{Max}(C) < \bigl(\mathrm{Max}(D) + \mathrm{Max}(C)\bigr) \times \mathrm{Max}(E)$$

  - $\underline{\mathrm{Max}(B) \equiv \mathrm{Max}(D) \div \mathrm{Min}(E)\ の場合}$: $\mathrm{Min}(E) < 1$ であるから、次式の通り矛盾。

$$\mathrm{Max}(A) \equiv \mathrm{Max}(D) \div \mathrm{Min}(E) + \mathrm{Max}(C) < \bigl(\mathrm{Max}(D) + \mathrm{Max}(C)\bigr) \div \mathrm{Min}(E)$$

いずれの場合についても矛盾が導かれる。よって補題は示された。 □

補題 5 $|A| \geq 3$ なる $A \subseteq \Lambda$ に対し、$\mathrm{Max}(A)$ は次のいずれかの形で書ける (但し a, b, c はリテラル; $n \geq 0$)。

$$\mathrm{Max}(A) \equiv \begin{cases} a \div \bigl((Z_1 - W_1) \times \cdots \times (Z_n - W_n)\bigr) \\ (b + c) \div \bigl((Z_1 - W_1) \times \cdots \times (Z_n - W_n)\bigr) \\ \bigl(a \times (b + c)\bigr) \div \bigl((Z_1 - W_1) \times \cdots \times (Z_n - W_n)\bigr) \end{cases}$$

証明 本証明中に現れる式は全て正規であるものとする。

$\mathrm{Max}(A)$ を乗除算に関して分解すると次のように書ける（但し $k + l \geq 1$; 各 a_i, b_i はリテラル)。

$$\begin{aligned} \mathrm{Max}(A) \equiv\ & \bigl(a_1 \times \cdots \times a_k \times (X_1 \pm Y_1) \times \cdots \times (X_l \pm Y_l)\bigr) \\ & \div \bigl(b_1 \times \cdots \times b_m \times (Z_1 \pm W_1) \times \cdots \times (Z_n \pm W_n)\bigr) \end{aligned}$$

被除数の最大性と除数の最小性より、特に次のような形となることがわかる。

$$\mathrm{Max}(A) \equiv \bigl(a_1 \times \cdots \times a_k \times (X_1 + Y_1) \times \cdots \times (X_l + Y_l)\bigr) \div \bigl((Z_1 - W_1) \times \cdots \times (Z_n - W_n)\bigr)$$

補題 4 より、各 $X_i + Y_i$ について $|\mathrm{Lit}(X_i + Y_i)| < 3$ でなければならない。よって次のような形となることがわかる（各 c_i, d_i はリテラル)。

$$\mathrm{Max}(A) \equiv \bigl(a_1 \times \cdots \times a_k \times (c_1 + d_1) \times \cdots \times (c_l + d_l)\bigr) \div \bigl((Z_1 - W_1) \times \cdots \times (Z_n - W_n)\bigr)$$

もし $k \geq 2$ だとすると、補題 3 の 1. より $a_1 \times a_2 < a_1 + a_2$ が成り立つ。もし $l \geq 2$ だとすると、補題 3 の 3. より $(c_1 + d_1) \times (c_2 + d_2) < \mathrm{Max}(\{c_1, d_1, c_2, d_1\})$ が成り立つ。いずれの場合も $\mathrm{Max}(A)$ の最大性に反する。よって $k \leq 1$ かつ $l \leq 1$ でなければならない。斯くして $\mathrm{Max}(A)$ は上に掲げた 3 通りのいずれかの形で書けることが示された。 □

定理 6 $\mathrm{Max}(\Lambda)$ は次のいずれかの形で書ける。

$$\mathrm{Max}(\Lambda) \equiv \begin{cases} \mathrm{Max}(A) \div (\mathrm{Min}(B) \times \mathrm{Min}(C)) & 但し\ \Lambda = A \sqcup B \sqcup C,\ 1 \leq |A| \leq 3,\ 2 \leq |B| \leq |C| \leq 7 \\ \mathrm{Max}(A) \div (X - Y) & \begin{array}{l} 但し\ \Lambda = A \sqcup B \sqcup C,\ B = \mathrm{Lit}(X),\ C = \mathrm{Lit}(Y), \\ \quad 1 \leq |A| \leq 3,\ 1 \leq |B| \leq 8,\ 1 \leq |C| \leq 8 \end{array} \end{cases}$$

証明 $\mathrm{Max}(\Lambda)$ は補題 5 に掲げた 3 通りのいずれかの形で書けて、更にその被除数（a, $b + c$, $a \times (b + c)$ のいずれか）は最大性より $\mathrm{Max}(A)$（但し $1 \leq |A| \leq 3$）と書ける。すると次式の形となる。

$$\mathrm{Max}(\Lambda) \equiv \mathrm{Max}(A) \div \bigl((Z_1 - W_1) \times \cdots \times (Z_n - W_n)\bigr)$$

$n = 1$ であれば $\mathrm{Max}(\Lambda) \equiv \mathrm{Max}(A) \div (X - Y)$ の形である。$n \geq 2$ であれば、$B := \mathrm{Lit}((Z_1 - W_1) \times \cdots \times (Z_{n-1} - W_{n-1}))$, $C := \mathrm{Lit}(Z_n - W_n)$ とおくと、除数の最小性より $\mathrm{Max}(\Lambda) \equiv \mathrm{Max}(A) \div (\mathrm{Min}(B) \times \mathrm{Min}(C))$ の形となる。 □